ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆ ⋆ ⋆

Dans les trois premières parties, on désigne par

- n et m des entiers > 0 tels que $n \leqslant m$;
- E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ avec son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$;
- e_j, $j = 1, \ldots, m$, des éléments non nuls de E satisfaisant une condition de la forme

$$\forall\, x \in E \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant \sum_j (x \,|\, e_j)^2 \tag{1}$$

où α est un réel > 0 ;

- T l'endomorphisme de E défini par

$$T(x) = \sum_j (x \,|\, e_j)\, e_j \ .$$

Si S est un endomorphisme de E, sa norme $\|S\|$ est défini par

$$\|S\| = \sup\{\|S(x)\| : \|x\| = 1\} \ .$$

Première partie

1. Donner un exemple simple de famille (e_j) satisfaisant une condition de la forme (1).

2. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_j.

3. On prend $n = 2$, $m = 3$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. Déterminer $\sum_j (x \,|\, e_j)^2$ et T.

4. Vérifier que T est autoadjoint, inversible et satisfait $\big(T(x) \,|\, x\big) \geqslant \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

5. Comparer $\|T\|$ et $\sup\{\big(T(x) \,|\, x\big) : \|x\| = 1\}$.

6. Trouver un réel β tel que $\big(T^{-1}(x) \,|\, x\big) \leqslant \beta\|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Que peut-on dire de $\|T^{-1}\|$?

7. On suppose que $\alpha\|x\|^2 = \sum_j (x \,|\, e_j)^2$ pour tout $x \in E$. Déterminer T.

Deuxième partie

On note F l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \ldots, f_m)$ sa base naturelle, $(\cdot|\cdot)_F$ son produit scalaire naturel. On définit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par

$$\Phi(x) = \sum_j (x \,|\, e_j)\, f_j \ .$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \to E$ satisfaisant

$$(\Psi(h) \,|\, x) = (h \,|\, \Phi(x))_F \quad \text{pour tous} \quad x \in E\,,\ h \in F\ .$$

8. Vérifier que l'on a $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$ et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$ et on définit une application linéaire $\tilde{\Phi} : E \to F$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j (x \,|\, \tilde{e}_j)\, f_j \ .$$

9. Vérifier que l'on a $F = \mathrm{Im}\ \tilde{\Phi} \oplus (\mathrm{Im}\ \Phi)^{\perp}$.

10. Étant donné un élément x de E, déterminer le minimum des nombres $\sum_j h_j^2$ pour les familles (h_j) vérifiant $x = \sum_j h_j e_j$, et préciser pour quelles familles (h_j) ce minimum est atteint.

11. Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants :

a) les e_j forment une base de E ;

b) les e_j forment une base orthonormale de E ;

c) on a $\alpha\|x\|^2 = \sum_j (x \,|\, e_j)^2$ pour tout $x \in E$.

Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation $T(x) = y$ par une méthode d'itérations successives. On pose

$$a = \inf\{\big(T(x)\,|\,x\big) : \|x\| = 1\} \quad , \quad b = \|T\| \ ;$$

on a donc $0 < a \leqslant b$. Pour tout réel $s > 0$ on pose $V_s = id_E - sT$.

12. Montrer que l'on a

$$\|V_s\| = \max\left(|1 - a\,s|\,,\,|1 - b\,s|\right) ,$$

13. Déterminer le minimum C de la fonction $s \mapsto \|V_s\|$, préciser pour quelle valeur s_0 de s il est atteint, et montrer que $C \in [0, 1[$. À quelle condition C est-il égal à 0 ?

[Il est conseillé de dessiner les courbes représentatives des fonctions $s \mapsto |1 - a\,s|$ et $s \mapsto |1 - b\,s|$].

On fixe un élément y de E et on définit une application U de E dans lui-même par

$$U(x) = x + s_0\big(y - T(x)\big) \ .$$

14. Étant donné x et $x' \in E$, comparer $\|U(x) - U(x')\|$ et $C\|x - x'\|$.

15. On désigne par x_0 un élément de E et on pose, pour tout entier $n > 0$, $x_n = U^n(x_0)$. Étudier le comportement de la suite (x_n). Conclure.

Quatrième partie

Dans cette partie, on désigne par

- E un espace préhilbertien réel ;
- T un endomorphisme continu de E (on ne le suppose pas autoadjoint) ;
- x_0 et y_0 des éléments de E.

Pour tout réel $s > 0$ on définit une application U_s de E dans lui-même par

$$U_s(x) = x + s\big(y_0 - T(x)\big) \ .$$

16.a) Trouver une condition portant sur T suffisante pour que l'on ait une majoration de la forme

$$\|id_E - s\,T\|^2 \leqslant 1 - 2a\,s + b^2\,s^2$$

avec $a > 0$, b réel.

b) Trouver alors une condition portant sur E, impliquant que la suite $x_n = U_s^n(x_0)$ soit convergente pour un s convenable ; préciser dans ce cas la nature (injectif ?, surjectif ?) de T.

* *
*